

Espaces Quotients

1.1. Quotient d'une application

Soit X un espace (topologique), Y un ensemble et $q: X \rightarrow Y$ une surjection.

Def: Un sous-ensemble $U \subset Y$ est un ouvert de la topologie quotient sur Y si et seulement si $q^{-1}(U)$ est ouvert dans X .

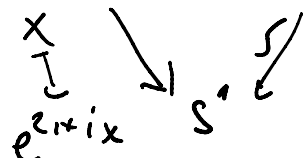
Lemme 1.1: Ceci définit une topologie sur Y

pt Exercice

Remark: On appelle q et Y une application et un espace quotient.

On obtient la même définition, si on remplace "ouvert" par "fermé".

Exple: $X = [0, 1] \xrightarrow{q} Y = (0, 1) \cup \{*\}$, $q(x) = \begin{cases} x & 0 < x < 1 \\ * & x = 0, 1 \end{cases}$



Def: Une application surj. continue $q: X \rightarrow Y$ entre espaces X, Y est un quotient si la topologie quotient est la topologie de Y .

Prop 1.2: Soient X, Y des espaces et $q: X \rightarrow Y$ une appl. surj., continue et ouverte (ou fermée), alors q est un quotient.

pt: Soit $U \subset Y$ ouvert, alors $q^{-1}(U) \subset X$ est ouvert et donc U est ouvert dans la top. quotient.

$\square$

donc U est ouvert dans la top. quotient.

Si $U \subset Y$ est un sous-ens. t.q. $q^{-1}(U)$ est ouvert, alors $U = q(q^{-1}(U))$ est ouvert car q est ouvert et surjectif.

Le cas où q est fermée est pareil $\square$

Attention: Pas toute app. quotient est ouverte ou fermée :

Soit $q: [0,3] \rightarrow [0,2]$ donnée par $q(t) = \begin{cases} t & 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & 1 < t \leq 2 \\ t-1 & 2 < t \leq 3 \end{cases}$

Alors la topologie quotient sur $[0,2]$ est la topologie standard (Ex.) mais $q((1,2)) = \{1\}$, donc q n'est pas ouverte.

Prop. 1.3: Soit X un espace, Y un ensemble et $q: X \rightarrow Y$ une application. La top. quotient sur Y est la plus fine qui rend q continue.

De plus une application $g: Y \rightarrow Z$ est continue $\Leftrightarrow g \circ q$ est continue.

pt: Si Y est muni d'une top. t.q. q est continue, alors $\forall U \subset Y$ ouvert $q^{-1}(U)$ est ouvert et donc U est ouvert dans la top. quotient.

$\Rightarrow$ est clair. Pour $\Leftarrow$: Soit $U \subset Z$ ouvert, alors $(g \circ q)^{-1}(U) = q^{-1}(g^{-1}(U))$ est ouvert $\Rightarrow$ $q^{-1}(U)$ est ouvert $\Rightarrow g$ est continue $\square$

On va souvent utiliser les propriétés suivantes:

Lemme 1.4: a) Si $p: X \rightarrow Y$, $q: Y \rightarrow Z$ sont des quotients, alors $q \circ p$ aussi.

b) Si $q: X \rightarrow Y$ est un quotient et X est compact, alors Y aussi.

pt: a) Clairement $q \circ p$ est surj. et continue et $(q \circ p)^{-1}(U)$ ouvert pour $U \subset Z$ ouvert. Soit $U \subset Z$ t.q. $(q \circ p)^{-1}(U) \subset X$ est ouvert. Alors

pour $U \subset \mathbb{R}$ ouvert. Soit $U \subset \mathbb{R}$ t.q. $(q \circ p)^{-1}(U) \subset X$ est ouvert. Alors $p^{-1}(q^{-1}(U))$ est ouvert $\xrightarrow{p \text{ quot.}}$ $q^{-1}(U)$ est ouvert $\xrightarrow{q \text{ quot.}}$ U est ouvert.

b) L'image d'un cpt est cpt. $\square$

1.2. Quotient par une relation

Def: Soit $\sim$ une relation d'équivalence sur un espace X et $q: X \rightarrow X/\sim$ le quotient. On appelle $X/\sim$ l'espace quotient s'il est muni de la topologie quotient.

Rem: Chaque surjection $q: X \rightarrow Y$ définie une rel. d'équiv. sur X : $x \sim x' \Leftrightarrow q(x) = q(x')$ et $X/\sim = Y$. Donc les deux notions d'espace quotient sont équivalentes.

Expl: $S^1 = [0,1]/\sim$ où $x \sim x' \Leftrightarrow x = x'$ ou $x, x' \in \{0,1\}$.

Proposition 1.5 (Propriété universelle): Soit $q: X \rightarrow X/\sim$.

Alors pour toute application continue $f: X \rightarrow Y$ t.q. $x \sim x' \Rightarrow f(x) = f(x')$, $\exists! \bar{f}: X/\sim \rightarrow Y$ avec $\bar{f} \circ q = f$.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{q} & X/\sim \\ \downarrow f & \searrow \exists! \bar{f} & \\ Y & & \end{array}$$

pt: $\forall [x] \in X/\sim$ on doit avoir $\bar{f}([x]) = \bar{f} \circ q(x) = f(x)$, donc $\bar{f}$ est unique. Comme $x \sim x' \Rightarrow f(x) = f(x')$ $\bar{f}$ est aussi bien-définie comme appl. entre ensembles. Finalement $\bar{f}$ est continue par 1.3 $\square$

Def: Pour $A \subset X$ le collapse X/A est l'espace quotient $X/\sim$ où $x \sim x' \Leftrightarrow x = x'$ ou $x, x' \in A$.

$X/\sim$ où $x \sim x' \Leftrightarrow x = x' \text{ ou } x, x' \in A$.

Exple: $[0,1]/\{0,1\} = S^1 \quad [] \rightsquigarrow \bigcirc$

Quelques exemples importants:

- Un espace pointé (X, x) est un espace topologique avec un point $x \in X$.

Def: Soit A un ensemble et $\forall a \in A, (X_a, x_a)$ un espace pointé.

Le wedge $\bigvee X_a = \bigvee_{a \in A} X_a$ est le quotient $\bigcup X_a / \{x_a \mid a \in A\}$

Exemple: $S^1 \vee S^1 = \bigcirc \bigcirc$

- Soit $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\}$ et $S^{n-1} = \partial D^n$. Alors

$$D^n / S^{n-1} = S^n.$$

Explicitement, soit $f: D^n \rightarrow S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 

$$x \mapsto \begin{cases} 2x, \sqrt{1 - \|2x\|^2} & \text{si } \|x\| \leq 1/2 \\ (4 - 4\|x\|)x, -\sqrt{1 - (4 - 4\|x\|)^2 \|x\|^2} & \text{si } \|x\| > 1/2 \end{cases}$$

f est continue et $f(S^{n-1}) = \{0, -1\}$

$\xrightarrow{1.5} \bar{f}: D^n / S^{n-1} \rightarrow S^n$ continue. On peut vérifier que c'est une bijection, et comme D^n / S^{n-1} est qst et S^n séparé, $\bar{f}$ est un homéo. (Prop 1.10 du polycopié).

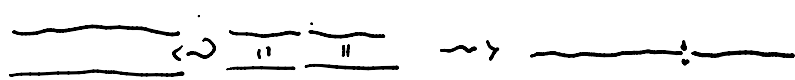
- Def: Soit X un espace et $I = [0,1]$. On appelle $X \times I$ le cylindre sur X et $CX = X \times I / X \times \{0\}$ le cone sur X .

Exple:  $S^1 \times I$,  $C(S^1) \cong D^2$

3. Quotient et séparation

En général le quotient d'un espace séparé n'est pas séparé:

En général le quotient d'un espace séparé n'est pas séparé:

Exple: 

Formellement: $X = \mathbb{R} \times \{0, 1\}$ et $(s, k) \sim (t, l) \Leftrightarrow s = t$ et $s \neq 0 \Rightarrow k = l$

On peut utiliser le critère suivant:

Prop 1.6: Soit $\sim$ une rel. d'équiv. sur X . Si $X/\sim$ est séparé, alors le graph $\Gamma = \{(x, x') \in X \times X \mid x \sim x'\}$ de $\sim$ est fermé dans $X \times X$.

Dans notre exemple $X \times X = \mathbb{R}^2 \times (0, 0) \cup \mathbb{R}^2 \times (0, 1) \cup \mathbb{R}^2 \times (1, 0) \cup \mathbb{R}^2 \times (1, 1)$.

et $\Gamma \cap \mathbb{R}^2 \times (0, 1) = \{(s, 0) \times (t, 1) \mid s = t \neq 0\}$ / donc $\mathbb{R}^2$
 $\leadsto$ Pas fermé $\stackrel{1.6}{\Rightarrow} X/\sim$ pas séparé.

Pour la preuve on va utiliser

Rappel (Ex 0.1) Un espace X est séparé $\Leftrightarrow \Delta = \{(x, x) \in X \times X \mid x \in X\}$ est fermée dans $X \times X$.

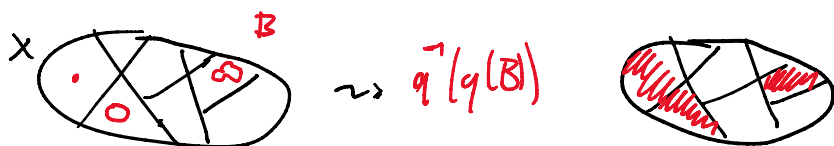
preuve de 1.6: $X/\sim$ séparé $\stackrel{\text{Ex 0.1}}{\Leftrightarrow} \Delta \subset X/\sim \times X/\sim$ est fermée

Mais $(q \times q)^{-1} \Delta = \{(x, y) \in X \times X \mid [x] = [y]\} = \text{Graph de } \sim$,
 qui est donc fermé $\square$

Def: Soit $q: X \rightarrow Y$ un quotient. Alors $A \subset X$ est saturé ou q -saturé si $A = q^{-1}(q(A))$.

Pour tout $B \subset X$ on appelle $q^{-1}(q(B))$ la saturation de B par q .

Rmq: si $q: X \rightarrow X/\sim$, alors $q^{-1}(q(B)) = \{x \in X \mid \exists b \in B, x \sim b\}$



Prop. 1.6: $\forall B \subset X, \bar{q^{-1}(q(q^{-1}(q(B))))} = \bar{q^{-1}(q(B))}$.

Prop. 1.7: Soit $\sim$ une rel. d'équiv. sur un X séparé. Si $q^{-1}(q(x))$ est compact dans $X \ \forall x \in X$ et $q^{-1}(q(F))$ est fermé $\forall F \subset X$ fermé alors $X/\sim$ est séparé.

Rappel: Si X est séparé et $C_1, C_2 \subset X$ cpt et disjoint, alors $\exists U_1, U_2 \subset X$ ouvert t.q. $C_i \subset U_i$ et $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. (Exercice?)

preuve: Soient $[x_1] + [x_2] \in X/\sim$. Alors $q^{-1}([x_1]) = q^{-1}(q(x_1))$ et $q^{-1}([x_2])$ sont disjoint et cpt par hypothèse. $\xrightarrow{\text{Ex 0.3}} \exists U_1, U_2 \subset X$ ouvert disjoint avec $q^{-1}([x_i]) \subset U_i$.

Pour rendre $q(U_1), q(U_2)$ disjoint et ouvert, on considère $F_i = X \setminus U_i$ et $F'_i = \bar{q^{-1}(q(F_i))}$. Alors par hypothèse F'_i est fermé et donc $U'_i = X \setminus F'_i$ ouvert. Comme $F'_i \supset F_i$, $U'_i \subset U_i \Rightarrow U'_1 \cap U'_2 = \emptyset \Rightarrow q(U'_1) \cap q(U'_2) = \emptyset$
 • $q^{-1}(q(x_1)) \cap F'_1 = \emptyset \Rightarrow q^{-1}(q(x_1)) \cap F'_1 = \emptyset \Rightarrow q^{-1}(q(x_1)) \subset U'_1 \Rightarrow [x_1] = q(x_1) \in q(U'_1)$
 • Comme U'_i est saturé, $U'_i = q^{-1}(q(U'_i))$ et donc $q(U'_i)$ est ouvert. $\square$

Exple: L'exponentielle $e: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ est un quotient entre espaces séparés, mais $q^{-1}(q(x)) = \mathbb{Z} \ \forall x \in S^1$ n'est pas compact. Par contre on pourrait restreindre e à une domaine plus petit e.g. $e|_{[0,1]}$ et appliquer 1.7.



Corollaire 1.8: Soit $A \subset X$ cpt et X séparé, alors X/A est séparé.

preuve: On applique 1.7: On a $\forall B \subset X$ que $q^{-1}(q(B)) = \begin{cases} B & B \cap A = \emptyset \\ B \cup A & B \cap A \neq \emptyset \end{cases}$

preuve: On applique 1.7: On a $\forall B \subset X$ que $q^{-1}(q(B)) = \begin{cases} B & \text{si } B \cap A = \emptyset \\ B \cup A & \text{si } B \cap A \neq \emptyset \end{cases}$
 $\Rightarrow q^{-1}(q(\{x\})) = \begin{cases} \{x\} & \text{si } x \notin A \\ A & \text{si } x \in A \end{cases}$ est c.p.t. et $q^{-1}(q(F)) = \begin{cases} F & \text{si } F \cap A = \emptyset \\ F \cup A & \text{si } F \cap A \neq \emptyset \end{cases}$ est fermé
car un c.p.t. dans X séparé est fermé. $\square$

La saturation nous permet de caractériser les quotients:

Prop 1.9: Soit $q: X \rightarrow Y$ continue et surjective. Alors q est un quotient $\Leftrightarrow q(U) \subset Y$ est ouvert pour tout $U \subset X$ ouvert et saturé.

Preuve: " $\Rightarrow$ " $q(U) \subset Y$ ouvert $\Leftrightarrow q^{-1}(q(U)) \subset X$ ouvert
"U si U saturé."

" $\Leftarrow$ ": Soit $U \subset Y$ ouvert $\Rightarrow q^{-1}(U)$ ouvert car q est continue.
Si $U \subset Y$ tq $q^{-1}(U)$ est ouvert, alors comme $q^{-1}(U)$ est saturé, $q(q^{-1}(U)) = U$ est ouvert dans Y . $\square$

Exemples: Les espaces projectifs:

* Def: L'espace projectif réel $\mathbb{RP}^n$ est le quotient $S^n / \sim$
où $x \sim y \Leftrightarrow x = \pm y$

Exple: $\mathbb{RP}^0: \cdot / \sim = \cdot$, $\mathbb{RP}^1 = S^1 / \sim = \mathbb{C}P^1$, $\mathbb{RP}^2 = \mathbb{C}P^2$

Remk: On peut aussi voir $\mathbb{RP}^n$ comme l'espace de droites dans $\mathbb{R}^{n+1}$
passant par l'origine car chaque droite est uniquement déterminée par deux points antipodaux sur la sphère.

Une telle droite est aussi donnée par un vecteur $\neq 0$ modulo scalaire
donc $\mathbb{RP}^n \simeq \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} / \mathbb{R}^*$, mais il faut expliquer la topologie du côté droit.

Corollaire 1.10: $\mathbb{RP}^n$ est compact et séparé.

Pl: C.p.t. par 1.4 b) car S^n est c.p.t. Séparé par 1.7 car S^n est séparé et $q^{-1}(q(F)) = F \cup -F \quad \forall F \subset S^n$ $\square$

$$= S^{2n+1} / \sim$$

est séparé et $q(q^{-1})^{-1} = 1$ $\square$

• Def: L'espace projectif complexe $\mathbb{CP}^n = S^{2n+1}/\sim$ est le quotient de $S^{2n+1} \subset \mathbb{R}^{2n+2} \cong \mathbb{C}^{n+1}$ par la relation $x \sim y \Leftrightarrow \exists a \in S^1 \subset \mathbb{C}^*$ t.q. $x = a \cdot y$.

Exple: $\mathbb{CP}^0 = *$, $\mathbb{CP}^1 \cong S^2$ (Exercice)

Rank: On a de nouveau $\mathbb{CP}^n = \{ \text{droites dans } \mathbb{C}^{n+1} \} = \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} / \mathbb{C}^*$

4. Quotients par des actions de groupes

Def: Un groupe topologique est un groupe G muni d'une topologie t.q. la multiplication $m: G \times G \rightarrow G$ et l'inverse $i: G \rightarrow G$ sont continues.

Exple: • Un groupe avec la topologie discrète.

- $S^1 \subset \mathbb{C}$ avec la topologie de sous-espace. On a que m et i sont continues car donnés par des fractions rat. par exemple $i(a+bi) = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$
- Similaire $\mathbb{C}^* \subset \mathbb{C}$, $\mathbb{R}^* \subset \mathbb{R}$
- $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{Q}^n$ avec addition
- $GL_n(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{n^2}$, $GL_n(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C}^{n^2}$ par le même raisonnement.

Lemme 1.11: Si G est un groupe topologique, alors tout $H < G$ avec la topo. de sous-espace est aussi un grp topo.

Preuve: $m_H = m_G|_{H \times H}$ et $i_H = i_G|_H$ $\square$

Def: Une action (à droite) d'un groupe top. sur un espace X

est une appl. continue $\mu: X \times G \rightarrow X$ t.q.
 $(x, g) \mapsto \mu(x, g) =: xg$

1) $\forall x \in X \quad x \cdot e_G = x$

2) $\forall x \in X, \forall g, g' \in G \quad x \cdot (gg') = (x \cdot g) \cdot g'$

Notation: $G \curvearrowright X$

Rank Si $G \curvearrowright X$, on a $\forall g \in G \quad \mu_g: X \rightarrow X, x \mapsto xg$, qui est un homeom.

avec μ_g^{-1} comme inverse.

Def: Si G agit sur X , l'espace des orbites ou le quotient X/G est le quotient $X/\sim$ où $x \sim y \iff \exists g \in G \text{ t.q. } x = y.g$.

Expls: . $S^n \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$

$$S^n / \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \mathbb{R}P^n$$

$$\begin{array}{ccc} \text{C}^{2n} & (X, \pm 1) \xrightarrow{\{\pm 1\}} & X \cdot (\pm 1) \\ \downarrow & \downarrow & \\ \text{C}^{2n+1} \times \text{C}^1 & \rightarrow & \text{C}^{2n+1} \\ (X, \lambda) \mapsto & & X \cdot \lambda \end{array}$$

$$S^{2n+1}/S^1 = \mathbb{C}P^n$$

$$\bullet \quad \mathbb{R}^2 \times \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, n) \mapsto x + n$$

 $\leadsto \mathbb{R}^2/\mathbb{Z} \cong \mathbb{S}^1$

$$\begin{aligned} & \cdot S^2 \times S^1 \rightarrow S^2 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \dots \end{aligned}$$

 $S^2/S^1 \approx \mathbb{I}$

• Pour $H < G$ un sous-groupe on a

$$G \times H \rightarrow G \quad \text{Le quotient est } G/H = \{gH \mid g \in G\}.$$

Si $H \triangleleft G$ est normale alors G/H est un grp top. (Exercice?)

Prop 1.12: Soit $G \curvearrowright X$ topologique. Alors

1) L'appl. quotient $q: X \rightarrow X/G$ est ouverte.

2) Si X est compact, X/G aussi.

3) Si X et G sont c.p.t. et séparé, alors X/G aussi.

Preuve: Pour tout $Y \subset X$ on a $q^{-1}(q(Y)) = \{x \in X \mid q(x) \in q(Y)\}$

$$= \{x \in X \mid \exists g \in G, y \in Y, x = y \cdot g\} = \bigcup_{g \in G} Yg = \mu(Y \times G)$$

1) Si $U \subset X$ est ouvert alors $q^{-1}(q(U)) = \bigcup_{g \in G} U_g$ est ouvert, car μ_g est un homeo, donc U_g ouvert $\forall g \in G$. $\Rightarrow q(U)$ est ouvert dans X/G

2) Por 1.4.

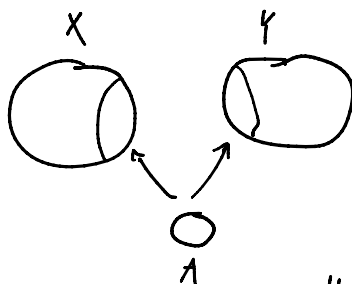
3) Il suffit de montrer, que X/G est séparé.

Seja $\gamma: X \rightarrow Y$ um mapa contínuo. Se γ é um mapa aberto, então $\gamma(X) \subset Y$ é aberto em Y .

3) Il suffit de montrer, que X/G est séparé.
 On a $\bar{q}^{-1}(q(x)) = \mu(\{x\} \times G) \subset X$ cpct car G cpct.
 et $\forall F \subset X$ fermé, $\bar{q}^{-1}(q(F)) = \mu(F \times G)$ fermé car
 compact et X séparé. $\xrightarrow{1.7} X/G$ est séparé.

Exemple: $\mathbb{R}P^n$ et $\mathbb{C}P^n$ sont cpct et séparés.

5. Recollements / Pushout:



Def: Soient A, X, Y des espaces et $f: A \rightarrow X$
 $g: A \rightarrow Y$ des applications continues.

Le recollement ou pushout $X \cup_A Y$ est l'espace $X \cup Y / \sim$ ou
 $\sim$ est la rel. d'équiv. engendré par $f(a) \sim g(a) \forall a \in A$

Remk: Si f n'est pas injective on peut avoir $g(a) \sim f(a) = f(b) \sim g(b)$,
 donc aussi des éléments dans X ou Y sont identifiés entre eux.

• Si f est injective, alors $\sim$ est engendré par $a \sim f(a) \forall a \in A$.
 En part. $a \sim a' \Leftrightarrow f(a) = f(a') \forall a, a' \in A$.
 et $z \sim z' \Leftrightarrow z = z' \forall z, z' \in X \cup Y$

• Si $A = \{pt\}$. $X \cup_A Y = X \cup Y$.

On a un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g} & Y \\ f \downarrow & & \downarrow j \\ X & \xrightarrow{i} & X \cup_A Y \end{array} \quad \begin{array}{c} Y \\ \downarrow j \\ X \cup_A Y \end{array} \quad \begin{array}{c} [Y] \\ \downarrow [j] \\ [X \cup_A Y] \end{array}$$

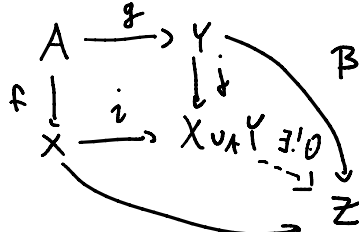
$x \mapsto [x]$

, car $[f(a)] = [g(b)]$

Prop 1.13 (Propriété univ. du pushout): Soient $f: A \rightarrow X$, $g: A \rightarrow Y$

deux appl. Pour tout $\alpha: X \rightarrow Z$, $\beta: Y \rightarrow Z$ t.q. $\alpha \circ f = \beta \circ g \exists!$

$\theta: X \cup_A Y \rightarrow Z$ t.q. $\theta \circ i = \alpha$, $\theta \circ j = \beta$



preuve: α et β induisent $H: X \cup Y \rightarrow Z$.

preuve: α et β induisent $H: X \cup Y \rightarrow Z$.



$$\text{On a } H(f(a)) = \alpha(f(a)) = \beta(g(a)) = H(g(a))$$

$$\stackrel{1.5}{\leadsto} \exists! \theta: X \cup Y \rightarrow Z \quad \text{t.q.} \quad \begin{array}{ccc} X \cup Y & \xrightarrow{H} & Z \\ \downarrow q & \searrow \theta & \uparrow \theta \\ X \cup Y & & X \cup Y \end{array} \quad \square$$

Prop 1.14: Soient X, Y séparés, $q: A \hookrightarrow Y$ l'inclusion d'un espace cpt et $f: A \rightarrow X$ une app. Alors $X \cup_f Y$ est séparé.



pf: Par 1.7 il suffit de montrer que $q^{-1}(q(F)) \subset X \cup Y$ est fermé pour $F \subset X \cup Y$ fermé et cpt pour $F = \text{pt}$.

• Soit $F \subset X$ fermé, alors $q^{-1}(q(F)) = \{x \in X \mid x \sim y \text{ pour un } y \in F\} \cup \{y \in A \mid f(y) \in F\}$
 $= F \cup f^{-1}(F)$ fermé.

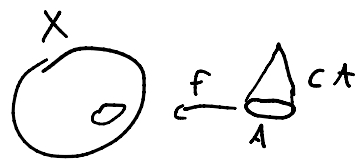
• Soit $F \subset Y$ fermé, alors $q^{-1}(q(F)) = \{x \in X \mid x = f(y) \text{ pour un } y \in F \cap A\} \cup \{y \in Y \mid y \sim y' \in F\}$

$$\begin{array}{c} \text{Diagram: } \text{Circle } \xrightarrow{q} \text{Circle with red circle inside} \\ \text{Label: } q^{-1}(F) \end{array} = f(F \cap A) \cup F \cup f^{-1}(f(F \cap A))$$

Comme $F \cap A$ est cpt $\Rightarrow f(F \cap A)$ cpt $\stackrel{x \text{ sep}}{\Rightarrow} f(F \cap A)$ fermé $\Rightarrow q^{-1}(q(F))$ fermé

Si $F = \text{pt}$ on voit par les mêmes calculs, que $q^{-1}(q(\text{pt}))$ est cpt $\square$

6. Attachement de cellules:



Si $A = S^{n-1}$ alors $CA \cong D^n$

Def: Soit $f: A \rightarrow X$ une app. On dit que $X \cup_f CA$, aussi noté $X \cup_f CA$, est obtenue de X en attachant une A-cellule le long de f.

f est l'application d'attachement.

Si $A = S^{n-1}$, $X \cup_f CA = X \cup_f D^n$ et on dit simplement cellule (de dimension n).

Corollaire 1.15: Soient X, A séparés, A cpt et $f: A \rightarrow X$.

Corollaire 1.15: Soient X, A séparés, A cpt et $f: A \rightarrow X$.
 Alors $X \cup_f A$ est séparé. Si X est cpt $X \cup_f A$ l'est aussi.
 pt: A séparé $\Rightarrow$ A séparé (Exercice) $\xrightarrow{1.14} X \cup_f A$ séparé.
 X cpt $\Rightarrow X \cup A$ cpt $\Rightarrow X \cup_f A$ cpt $\square$.

Def: La suspension ΣA d'un espace A est le quotient
 $\Sigma A = A \times I / \sim$ 

où $(a, t) \sim (b, s) \Leftrightarrow (a, t) = (b, s)$ ou $s = t = 0$ ou $s = t = 1$

Exemples d'attachements:

- Soit $f: A \rightarrow X$ constante, $f(A) = x_0 \in X$. Alors $X \cup_f A \simeq X \vee \Sigma A$
- On a $S^1 = * \cup_f D^1 = * \cup D^1$ ou $f: S^0 \rightarrow *$ est constant. $\hookrightarrow$
 Mais aussi $S^1 = S^0 \cup_{i,j} D^1 \cup_{j,i} D^1$ $\hookrightarrow$
- $S^2 = \bigcirc$ ou $\bigcirc$
 $\vdots$
- S^n admet une description avec 2 cellules de chaque dimension
 $0 < d \leq n$

Ex $\Rightarrow \mathbb{R}P^n$ a une structure cellulaire avec une cellule en
 chaque dim.

